PART2　因数定理

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+6x^2+11x+6$　　(2)　$2x^3-7x^2+4x+4$

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+3x^2-4　　(2)　$3x^3-4x^2-35x+12$

第 4 講　PART2 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$x^3-5x^2+3x+9=(x+\boxed{\text{ア}})(x-\boxed{\text{イ}})^2$

2　$4x^3+3x^2-25x+6=(x-\boxed{\text{ウ}})(\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}})(x+\boxed{\text{カ}})$

PART2　因数定理

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+6x^2+11x+6$　　(2)　$2x^3-7x^2+4x+4$

(1)　$P(x)=x^3+6x^2+11x+6$ とおくと

$$P(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x+1$ で割ると，商は x^2+5x+6

したがって

$$\begin{aligned} & x^3+6x^2+11x+6 \\ &=(x+1)(x^2+5x+6) \\ &=(x+1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2+5x+6 \\ x+1\,\overline{)\,x^3+6x^2+11x+6} \\ \underline{x^3+x^2} \\ 5x^2+11x \\ \underline{5x^2+5x} \\ 6x+6 \\ \underline{6x+6} \\ 0 \end{array}$$

(2)　$P(x)=2x^3-7x^2+4x+4$ とおくと

$$P(2)=2\cdot2^3-7\cdot2^2+4\cdot2+4=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，商は $2x^2-3x-2$

したがって

$$\begin{aligned} & 2x^3-7x^2+4x+4 \\ &=(x-2)(2x^2-3x-2) \\ &=(x-2)(2x+1)(x-2) \\ &=(x-2)^2(2x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x-2 \\ x-2\,\overline{)\,2x^3-7x^2+4x+4} \\ \underline{2x^3-4x^2} \\ -3x^2+4x \\ \underline{-3x^2+6x} \\ -2x+4 \\ \underline{-2x+4} \\ 0 \end{array}$$

＜組立除法＞

(1)

1	6	11	6	$\lfloor -1$
	-1	-5	-6	
1	5	6	0	

(2)

2	-7	4	4	$\lfloor 2$
	4	-6	-4	
2	-3	-2	0	

練習

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+3x^2-4 (2) $3x^3-4x^2-35x+12$

(1) $P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$P(1)=1^3+3\cdot1^2-4=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると，商は x^2+4x+4

したがって

$$\begin{aligned} &x^3+3x^2-4 \\ &=(x-1)(x^2+4x+4) \\ &=(x-1)(x+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2+4x+4 \\ x-1\,\big)\,\overline{x^3+3x^2\qquad-4} \\ \underline{x^3-\ x^2\qquad\quad} \\ 4x^2\qquad \\ \underline{4x^2-4x} \\ 4x-4 \\ \underline{4x-4} \\ 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=3x^3-4x^2-35x+12$ とおくと

$$P(-3)=3\cdot(-3)^3-4\cdot(-3)^2-35\cdot(-3)+12=0$$

よって，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x+3$ で割ると，商は $3x^2-13x+4$

したがって

$$\begin{aligned} &3x^3-4x^2-35x+12 \\ &=(x+3)(3x^2-13x+4) \\ &=(x+3)(3x-1)(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2-13x\ +4 \\ x+3\,\big)\,\overline{3x^3-\ 4x^2-35x+12} \\ \underline{3x^3+\ 9x^2\qquad\qquad} \\ -13x^2-35x\qquad \\ \underline{-13x^2-39x\qquad} \\ 4x+12 \\ \underline{4x+12} \\ 0 \end{array}$$

＜組立除法＞

(1)

1	3	0	−4	1
	1	4	4	
1	4	4	0	

(2)

3	−4	−35	12	−3
	−9	39	−12	
3	−13	4	0	

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3

[解説]

$P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とおくと

$$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+9=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。 [A] [B]

$P(x)$ を $x+1$ で割ると，次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^2-6x+9 \\
x+1\,\big)\,\overline{x^3-5x^2+3x+9} \\
\underline{x^3+\ x^2\qquad\qquad} \\
-6x^2+3x\quad \\
\underline{-6x^2-6x\quad} \\
9x+9 \\
\underline{9x+9} \\
0
\end{array}$$

商は x^2-6x+9 であるから

$$\begin{aligned}
&x^3-5x^2+3x+9 \\
&=(x+1)(x^2-6x+9) \\
&=\boldsymbol{(x+1)(x-3)^2}
\end{aligned}$$

〈組立除法〉

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -5 & 3 & 9 & \underline{-1} \\
 & -1 & 6 & -9 & \\ \hline
1 & -6 & 9 & 0 &
\end{array}$$

[A]　因数定理
多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow P(k)=0$

[B]　因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順
① $P(k)=0$ となる k を見つける。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。
② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
$$P(x)=(x-k)Q(x)$$
と表される。
③ $Q(x)$ を因数分解する。

2 **[正解]** ウ：2，エ：4，オ：1，カ：3

[解説]

$P(x)=4x^3+3x^2-25x+6$ とおくと

$$P(2)=4\cdot2^3+3\cdot2^2-25\cdot2+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。 [C] [D]

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，次のようになる。

$$
\begin{array}{r}
4x^2+11x-3 \\
x-2\,\big)\overline{4x^3+3x^2-25x+6} \\
\underline{4x^3-8x^2} \\
11x^2-25x \\
\underline{11x^2-22x} \\
-3x+6 \\
\underline{-3x+6} \\
0
\end{array}
$$

商は $4x^2+11x-3$ であるから

$$4x^3+3x^2-25x+6$$

$$=(x-2)\left(4x^2+11x-3\right)$$

$$=\boldsymbol{(x-2)(4x-1)(x+3)}$$

〈組立除法〉

4	3	−25	6	2
	8	22	−6	
4	11	−3	0	

[C]　因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ

$\Longleftrightarrow P(k)=0$

[D]　因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順

① $P(k)=0$ となる k を見つける。
　k の値の候補は
　$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
　である。

② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
　$$P(x)=(x-k)Q(x)$$
　と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。